Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2007
Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti
3 martie 2007
CLASA A XI-A, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Subiectul 1. Fie $a_1 \in (0,1)$ şi $(a_n)_{n\geq 1}$ şirul de numere reale dat de următoarea relaţie de recurenţă:

$$a_{n+1} = a_n(1-a_n^2),$$

pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot a_n$.

Soluţie şi barem. Prin inducţie rezultă $a_n \in (0,1)$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, deci şirul este mărginit. .... 1 punct

Cum $a_{n+1} - a_n = -a_n^3$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$, deducem că şirul este descrescător .... 1 punct

Prin urmare există $l \in \mathbb{R}^+$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$. Prin trecere la limită în relaţia de recurenţă, deducem $l = l - l^3$, deci $l = 0$. .... 1 punct

Şirul $\frac{1}{a_n^2}$ tinde crescător la ∞. Avem

$$\frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}} = \frac{(1-a_n^2)^2}{2-a_n^2},$$

de unde deducem, cu lema Stolz-Cesaro, că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n^2}} = \frac{1}{2}$. De aici $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$. .... 4 puncte

Subiectul 2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dacă $A \cdot {}^t A = I_n$, arătaţi că:

a) $|\mathrm{tr}\,(A)| \leq n$;

b) Pentru n impar avem $\det(A^2 - I_n) = 0$.

Soluţie şi barem. a) Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o rădăcină a polinomului $\det(A - XI_n) = 0$ (valoare proprie a lui A). Sistemul $AX = \lambda X$ cu X matrice coloană complexă are soluţie nebanală. .... 1 punct

Prin transpunere şi conjugare complexă obţinem $\overline{{}^t X \cdot {}^t A} = \overline{\lambda {}^t X}$. Înmulţind cele două relaţii obţinem $\overline{{}^t X}^t A \cdot A \cdot X = |\lambda|^2 \overline{{}^t X} \cdot X$. Cum $A \cdot {}^t A = I_n$ şi că

$\overline{{}^tX} \cdot X$ e număr real nenul strict pozitiv, deducem $|\lambda|^2 = 1$ deci $|\lambda| = 1$. . . . 2 puncte

Cum $\operatorname{tr}(A) = \sum \lambda$ unde suma se face după toate cele n valori proprii, cu multipiplicităţi, aplicând inegalitatea modulului deducem rezultatul cerut. 1 punct

b) Dacă n este impar polinomul caracteristic are cel puţin o rădăcină reala, deci ea este fie 1 fie -1, aşadar $\det(A - I_n) = 0$ sau $\det(A + I_n) = 0$, prin urmare $\det(A^2 - I_n) = 0$ . . . . 2 puncte

Subiectul 3. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de $x_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$. Se notează cu A mulţimea punctelor sale limită, i.e. mulţimea punctelor $x \in \mathbb{R}$ pentru care există un subşir al lui $(x_n)_n$ cu limita x.

a) Să se arate că $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subset A$;

b) Să se determine A.

(*Cu* $[x]$ *s-a notat partea întreagă a numărului real* x)

Soluţie şi barem. a) Fie $r = \frac{p}{q}$ un număr raţional arbitrar din $[0, 1]$, $p, q \in \mathbf{N}$, $q \neq 0$. Şirul $(n_k)_k$ dat de $n_k = q^2k^2 + 2pk$ este un şir crescător de numere naturale. Avem $[\sqrt{n_k}] = qk$. . . . . 2 puncte

Aşadar

$$x_{n_k} = \sqrt{q^2k^2 + 2pk} - qk = \frac{2p}{q\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2p}{q^2k}}\right)} \to \frac{p}{q}.$$

. . . . 2 puncte

b) Arătăm că $A = [0, 1]$. Avem evident $A \subset [0, 1]$, iar din puncul precedent rezultă că pentru orice $r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, orice $\varepsilon > 0$ şi orice $n \in \mathbf{N}^*$, există $n > n_0$ cu $|x_n - r| < \varepsilon$. . . . . 1 punct

Având în vedere punctul a) vom arăta că orice iraţional $\alpha \in (0, 1)$ este în A. Construim inductiv un şir strict crescător de numere naturale $(n_k)_k$ astfel încât $|x_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{k}$, astfel: dacă $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ au fost alese, găsim $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ cu $|r - \alpha| < \frac{1}{2(k+1}$ şi conform observaţie de mai sus cu $n_0 = n_k$ şi $\varepsilon = \frac{1}{2(k+1)}$ există $n_{k+1} > n_k$ cu $|x_{n_{k+1}} - r| < \frac{1}{2(k+1)}$. Atunci

$$|x_{n_{k+1}} - \alpha| \leq |x_{n_{k+1}} - r| + |r - \alpha| < \frac{1}{k + 1}.$$

Evident $\lim\limits_k x_{n_k} = \alpha$. . . . . 2 puncte

Subiectul 4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $B^2 = I_n$ şi $A^2 = AB + I_n$. Să se demonstreze că $\det(A) \leq \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Soluţie şi barem. Fie $(f_k)_k$ şirul lui Fibonacci,

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^k - \overline{\varphi}^k\right]$$

unde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Se verifică prin inducţie că $A^k = f_k A + f_{k-1} B$ pentru orice k impar. . . . . 3 puncte

Atunci $\frac{1}{f_k} A^k = A + \frac{f_{k-1}}{f_k} B$ şi trecând la limită după $k \to \infty$ rezultă

$$\det \left(\frac{1}{f_k} A^k \right) \to \det(A - \bar{\varphi} B) \in \mathbb{R}.$$

. . . . 2 puncte

Pe de altă parte, dacă presupunem că $\det A > \varphi^n$, obţinem

$$\det \left(\frac{1}{f_k} A^k \right) = \frac{1}{f_k^n} (\det A)^k = \left(\frac{\varphi^k}{f_k} \right)^n \left(\frac{\det A}{\varphi^n} \right)^k,$$

ce tinde la infinit. Contradicţia obţinută probează proprietatea enunţată. . 2 puncte

Observaţie. Rezultatul este cel mai bun posibil; alegem $B = I_n$ şi $A = \varphi I_n$.